Contare l'infinito: uno, due, infiniti infiniti

Alberto Marcone

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Università di Udine
alberto.marcone@uniud.it
http://www.dimi.uniud.it/marcone

Istituto Tecnico Industriale "Bearzi"
Udine, 29 gennaio 2019

$$\infty$$

il simbolo per l'infinito (John Wallis, 1655)

La chiacchierata di oggi

1. I paradossi dell'infinito
2. Misurare l'infinito
3. Il primo infinito
4. Il secondo infinito
5. Infiniti infiniti
6. L'ipotesi del continuo

I paradossi dell'infinito

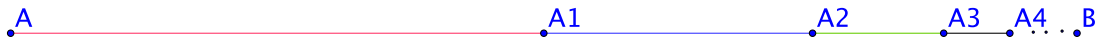
I paradossi dell'infinito

La parola paradosso viene dal greco: $\pi\alpha\rho\alpha$ (contro) e $\delta o\xi\alpha$ (opinione) qualcosa che va contro l'opinione consolidata.

I **paradossi dell'infinito** sorgono quando vogliamo applicare all'infinito alcune proprietà che sappiamo essere vere nel campo degli oggetti finiti.

Un antico paradosso: Zenone (489 a.c.-431 a.c.)

- Sei fermo al semaforo, diventa verde e tenti di attraversare la strada;
- prima di attraversarla tutta, dovrai attraversarne metà;
- poi dovrai attraversare metà della rimanente metà;
- ma poi dovrai attraversarne metà della metà della metà;
- e così via...



Quindi non puoi attraversare la strada perché dopo finiti "passi" ti mancherà sempre un pezzo: devi fare infiniti passi, che richiedono un tempo infinito (e il semaforo nel frattempo diventa rosso!).

La soluzione moderna al paradosso di Zenone

Alla base del Paradosso di Zenone c'è l'idea che non possiamo compiere infinite azioni in un tempo finito, ovvero che la somma di infinite quantità debba sempre essere più grande di qualsiasi numero finito, cioè infinita.

Solo con la nascita del concetto di limite i matematici hanno chiarito che non è così: la somma di infinite quantità può essere finita, ma è necessario che le quantità diventino via via sempre più piccole, come nel caso dei tratti di strada da percorrere.

Un paradosso sulle somme infinite

Quanto fa $1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) \cdots$?

$$\big(1 + (-1)\big) + \big(1 + (-1)\big) + \big(1 + (-1)\big) + 1 \cdots = 0 + 0 + 0 + 0 \cdots = 0$$

$$1 + \big((-1) + 1\big) + \big((-1) + 1\big) + \big((-1) + 1\big) \cdots = 1 + 0 + 0 + 0 + 0 \cdots = 1$$

$$\big((1 + (-1) + 1\big) + \big(1 + (-1) + 1\big) + \big(1 + (-1) + 1\big) \cdots = 1 + 1 + 1 + 1 \cdots = \infty$$

Il paradosso di Galileo I

Galileo Galilei, nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* del 1638, fa dire ai personaggi del suo dialogo:

Salviati: Io suppongo che voi benissimo sappiate quali sono i numeri quadrati, e quali i non quadrati.
Simplicio: So benissimo che il numero quadrato è quello che nasce dalla moltiplicazione d'un altro numero in se medesimo: e così il quattro, il nove, etc., son numeri quadrati, nascendo quello dal dua, e questo dal tre, in se medesimi moltiplicati.
Salviati: Benissimo: e sapete ancora, che sì come i prodotti si dimandano quadrati, i producenti, cioè quelli che si multiplicano, si chiamano lati o radici; gli altri poi, che non nascono da numeri multiplicati in se stessi, non sono altrimenti quadrati. Onde se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?
Simplicio: Non si può dir altrimenti.

Il paradosso di Galileo II

Salviati: Interrogando io di poi, quanti siano i numeri quadrati, si può con verità rispondere, loro esser tanti quante sono le proprie radici, avvenga che ogni quadrato ha la sua radice, ogni radice il suo quadrato, né quadrato alcuno ha più d'una sola radice, né radice alcuna più d'un quadrato solo.
Simplicio: Così sta.
Salviati: Ma se io domanderò, quante siano le radici, non si può negare che elle non siano quante tutti i numeri, poiché non vi è numero alcuno che non sia radice di qualche quadrato; e stante questo, converrà dire che i numeri quadrati siano quanti tutti i numeri, poiché tanti sono quante le lor radici, e radici son tutti i numeri: e pur da principio dicemmo, tutti i numeri esser assai più che tutti i quadrati, essendo la maggior parte non quadrati. E pur tuttavia si va la moltitudine de i quadrati sempre con maggior proporzione diminuendo, quanto a maggior numeri si trapassa; perché sino a cento vi sono dieci quadrati, che è quanto dire la decima parte esser quadrati; in dieci mila solo la centesima parte sono quadrati, in un millione solo la millesima: e pur nel numero infinito, se concepir lo potessimo, bisognerebbe dire, tanti essere i quadrati quanti tutti i numeri insieme.

Il paradosso di Galileo III

Sagredo: Che dunque si ha da determinare in questa occasione?
Salviati: Io non veggo che ad altra decisione si possa venire, che a dire, infiniti essere tutti i numeri, infiniti i quadrati, infinite le loro radici, né la moltitudine de' quadrati esser minore di quella di tutti i numeri, né questa maggior di quella, ed in ultima conclusione, gli attributi di eguale maggiore e minore non aver luogo ne gl'infiniti, ma solo nelle quantità terminate.

Dunque Galileo conclude che non possiamo misurare l'infinito.

La ragione è che tentare di misurare l'infinito porta a una contraddizione con un principio fondamentale che risale ad Euclide:

Il tutto è maggiore della parte

Misurare l'infinito

Misurare o non misurare?

Il paradosso di Galileo ci pone di fronte ad un bivio:

1. Restare fedeli al principio di Euclide. È la soluzione scelta dalla maggior parte dei matematici fino a metà del 1800.

   I paradossi dell'infinito sono delle contraddizioni che ci dicono che c'è qualcosa di inerentemente sbagliato nel cercare di misurare l'infinito.

   "L'infinito è solo un modo di dire" (Gauss)

2. Rigettare il principio di Euclide, ritenendolo valido solo per gli insiemi finiti. I paradossi non sono contraddizioni, ma avvertimenti: se vogliamo misurare l'infinito dobbiamo aspettarci che alcune proprietà dei numeri finiti non valgano più.

   Questo è successo anche in altre occasioni in cui abbiamo esteso l'insieme dei "numeri": nei numeri naturali ogni numero ha finiti divisori, ma questo non vale nel contesto dei numeri reali.

   Il paradosso di Galileo coinvolge nozioni quali "è più grande di", "ha lo stesso numero di elementi di".

   Iniziamo a interrogarci su cosa significhino veramente.

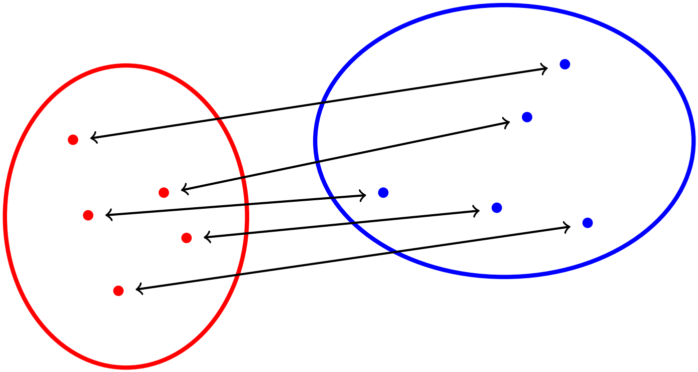
Confrontare insiemi

Come verificare che due insiemi hanno la stessa quantità di elementi?

Se sono finiti, possiamo *contarli*.

Ma se sono infiniti, non sappiamo come "contare" questo tipo di insiemi.

Prima di *inventare/scoprire* i numeri, probabilmente gli uomini confrontavano gli insiemi in un altro modo.



Una definizione apparentemente innocua

Definizione

Due insiemi hanno la stessa cardinalità (lo stesso "numero" di elementi) se esiste una biiezione (funzione iniettiva e suriettiva) fra loro.

Ad esempio: i numeri pari hanno la stessa cardinalità dei numeri dispari.

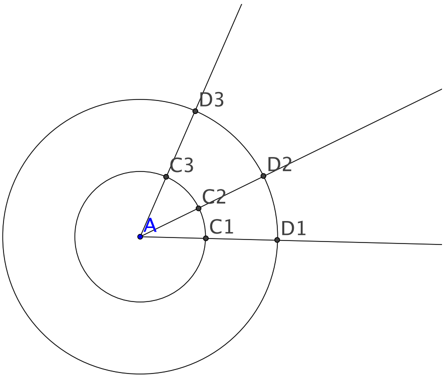
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \dots & 2n & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots & \updownarrow & \dots \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & \dots & 2n+1 & \dots \end{array}$$

Galileo ci ha mostrato anche che i numeri naturali hanno la stessa cardinalità dei quadrati perfetti.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots & \updownarrow & \dots \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & \dots & n^2 & \dots \end{array}$$

Un paradosso geometrico

Due cerchi uno evidentemente *più piccolo* dell'altro ma di uguale cardinalità:



Entriamo in questo nuovo mondo

Non spaventiamoci di fronte a questi esempi, ma cerchiamo di esplorare il significato di questa definizione di cardinalità, anche per insiemi infiniti.

Definizione

Gli insiemi A e B hanno la stessa cardinalità se esiste una biiezione $f : A \to B$. Scriviamo $|A| = |B|$.

Il primo infinito

Insiemi numerabili

Definizione

Un insieme A è numerabile se $|\mathbb{N}| = |A|$,
cioè se esiste una biiezione tra $\mathbb{N}$ e A.

L'insieme dei numeri pari è numerabile: $n \mapsto 2n$ lo testimonia.

L'insieme dei quadrati perfetti è numerabile: $n \mapsto n^2$ lo testimonia.

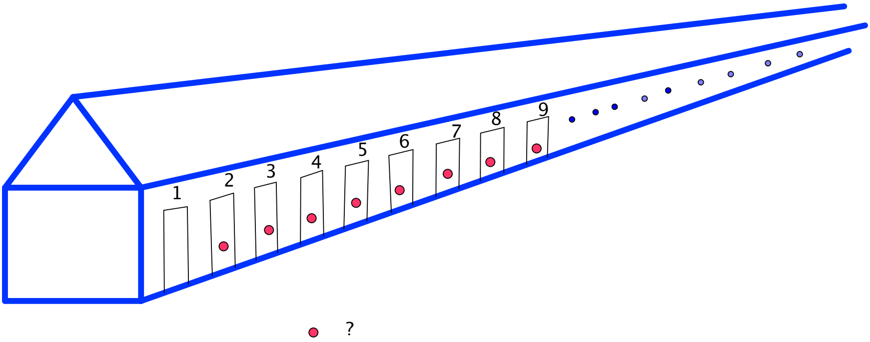
L'insieme dei numeri primi è numerabile:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 11 & 13 & 17 & \dots \end{array}$$

In modo simile si vede che ogni sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}$ è numerabile.

L'albergo di Hilbert I

Il portiere fa spostare l'occupante della camera n nella camera $n + 1$, e così libera la camera 1 per il nuovo ospite:



Unione di un insieme numerabile e di un insieme finito

Se A è numerabile e B è un insieme finito con k elementi, allora $A \cup B$ è numerabile.

Se $f : \mathbb{N} \to A$ e $g : \{0, 1, \dots, k-1\} \to B$ sono biiezioni e $A \cap B = \varnothing$, definiamo la biiezione $h : \mathbb{N} \to A \cup B$ ponendo:

$$h(n) = g(n) \quad \text{se } n < k;$$
$$h(n) = f(n-k) \quad \text{se } n \geq k.$$

In pratica prima ci occupiamo degli elementi di B, e quando abbiamo finito avremo comunque abbastanza "camere" libere per gli elementi di A.

Le stringhe di 0 e 1 sono numerabili

Le stringhe (finite) di 0 e 1, come $s_1 = 00101$, $s_2 = 1110$, $s_3 = 000101110101$, si possono classificare secondo la loro lunghezza: $|s_1| = 5$, $|s_2| = 4$, $|s_3| = 12$.

Si verifica che ci sono 2^n stringhe di lunghezza n.

Possiamo prima elencare l'unica stringa di lunghezza 0, poi le 2 stringhe di lunghezza 1, le 4 stringhe di lunghezza 2, le 8 stringhe di lunghezza 3 $\dots$.

In questo modo creiamo la biiezione tra le stringhe di 0 e 1 e $\mathbb{N}$.

Lo stesso si può fare con le parole che possiamo scrivere con le 26 lettere (ce ne sono 26^n di lunghezza n): sono numerabili.

Anche i libri che possono essere scritti sono numerabili: contando maiuscole e minuscole, punteggiatura, spazi, ce ne sono 60^n che usano n caratteri.

Questo funziona perché un'unione numerabile di insiemi finiti è numerabile.

Gli interi

L'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi è numerabile:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \dots \end{array}$$

Definiamo la biiezione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ ponendo

$$f(2n) = -n;$$
$$f(2n+1) = n+1.$$

L'albergo di Hilbert II

L'albergo di Hilbert è di nuovo tutto occupato.

Questa volta arriva un autobus con un insieme numerabile di viaggiatori.

Il portiere fa spostare l'occupante della camera n nella camera $2n$, e così libera le camere con numero dispari per i nuovi ospiti.

Questo dimostra che l'unione di due insiemi numerabili è numerabile.

Se $f : \mathbb{N} \to A$ e $g : \mathbb{N} \to B$ sono biiezioni e $A \cap B = \varnothing$ definiamo la biiezione $h : \mathbb{N} \to A \cup B$ ponendo:

$$\begin{aligned} h(2n) &= f(n); \\ h(2n+1) &= g(n). \end{aligned}$$

Similmente possiamo dimostrare che l'unione di tre, quattro, ... insiemi numerabili è numerabile.

Le coppie di numeri naturali

L'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ delle coppie di numeri naturali è numerabile:

5	15	22	30	39	49	60
4	10	16	23	31	40	50
3	6	11	17	24	32	41
2	3	7	12	18	25	33
1	1	4	8	13	19	26
0	0	2	5	9	14	20
	0	1	2	3	4	5

$$(x, y) \mapsto \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x = c(x, y)$$

L'albergo di Hilbert III

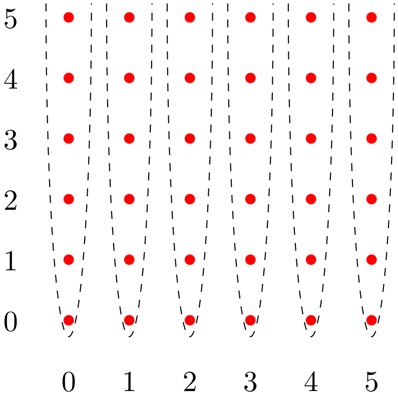
L'albergo di Hilbert è di nuovo tutto occupato.

Questa volta arriva una quantità numerabile di autobus ciascuno con un insieme numerabile di viaggiatori.

Il portiere fa spostare l'occupante della camera n nella camera $c(n, 0)$, e così libera le camere del tipo $c(n, m+1)$ per i nuovi ospiti. Poi sistema il viaggiatore numero n dell'autobus numero m nella camera $c(n, m+1)$.

Un racconto sull'albergo di Hilbert: *L'hotel straordinario, o il milionesimo viaggio di Ion il Tranquillo* di Naum Yakovlevich Vilenkin
(ma spesso attribuito a Stanisław Lem, p es dalla traduzione in *Racconti Matematici*, Einaudi 2006).

Unioni numerabili di insiemi numerabili sono numerabili



Ogni colonna è numerabile, e quindi abbiamo mostrato che un'unione numerabile di insiemi numerabili è numerabile.

I razionali sono numerabili

I numeri razionali, elementi di $\mathbb{Q}$, possono essere visti come coppie di naturali (numeratore e denominatore) con in più il segno ($+$ o $-$).

Dimentichiamo il segno e consideriamo l'insieme dei razionali positivi $\mathbb{Q}^+$.

Non c'è una biiezione tra le coppie di naturali e $\mathbb{Q}^+$:

- innanzitutto il denominatore deve essere diverso da 0, quindi guardiamo a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^+$;
- poi le coppie $(1,2)$, $(2,4)$, $(3,6)\dots$ corrispondono allo stesso razionale $\frac{1}{2}$.

Questo fa sì che $\mathbb{Q}^+$ sia più "piccolo" di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^+$ e abbiamo già visto che quest'ultimo è numerabile.

In pratica quando percorriamo la griglia di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^+$ saltiamo le coppie di numeri non primi tra loro, cioè con $\mathrm{mcd}(x, y) > 1$.

Dato che $\mathbb{Q}^+$ è numerabile, lo è anche $\mathbb{Q}^-$, e quindi anche $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-$.

$\mathbb{Q}$ è in biiezione con $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$

Eppure $\mathbb{Q}$ sembra molto più “grande” di $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$.

Per esempio tra due elementi di $\mathbb{Q}$ (o addirittura di $\mathbb{R}$) c’è sempre un altro elemento di $\mathbb{Q}$.

Il secondo infinito

I numeri reali

Teorema (Cantor)

L'insieme $\mathbb{R}$ *dei numeri reali non è numerabile.*

Sappiamo come dimostrare che un insieme è numerabile: basta esibire una biiezione tra $\mathbb{N}$ e quell'insieme.

Ma come dimostrare che un insieme non è numerabile?

Bisogna dimostrare che nessuna funzione è una biiezione tra $\mathbb{N}$ e quell'insieme.
Sembra molto più difficile perché richiede di considerare funzioni arbitrarie.

L'idea della dimostrazione del teorema di Cantor è di considerare una funzione qualunque $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e far vedere che non è una biiezione facendo vedere che non è una suriezione.

Data f bisogna quindi trovare $x \in \mathbb{R}$ tale che $x \neq f(n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Ovviamente x dipenderà da f.

La dimostrazione di Cantor: un esempio

Consideriamo $f : \mathbb{N} \to [0,1]$ e facciamo vedere che non è una suriezione.

$$
\begin{array}{rcccccccccccc}
f(0) = & 0, & 6 & 1 & 0 & 4 & 7 & 8 & 6 & 3 & 1 & 3 & \dots \\
f(1) = & 0, & 4 & 3 & 5 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
f(2) = & 0, & 1 & 2 & 6 & 7 & 8 & 7 & 4 & 2 & 9 & 5 & \dots \\
f(3) = & 0, & 1 & 4 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 3 & 3 & 1 & \dots \\
f(4) = & 0, & 5 & 2 & 3 & 5 & 6 & 8 & 9 & 0 & 2 & 7 & \dots \\
f(5) = & 0, & 4 & 3 & 1 & 0 & 4 & 6 & 7 & 3 & 1 & 3 & \dots \\
f(6) = & 0, & 6 & 5 & 5 & 5 & 3 & 4 & 9 & 9 & 5 & 6 & \dots \\
f(7) = & 0, & 0 & 0 & 7 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & \dots \\
f(8) = & 0, & 5 & 6 & 7 & 2 & 2 & 4 & 9 & 5 & 3 & 2 & \dots \\
f(9) = & 0, & 8 & 4 & 5 & 2 & 6 & 9 & 4 & 2 & 5 & 7 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

Cerchiamo $x \in [0,1]$ tale che $x \neq f(n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$
x = \quad 0, \quad 5 \quad 6 \quad 5 \quad 6 \quad 5 \quad 5 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad \dots
$$

La dimostrazione di Cantor

Data $f : \mathbb{N} \to [0, 1]$, sia

$$0, d_{n,0}\, d_{n,1}\, d_{n,2}\, d_{n,3}\, \dots d_{n,k} \dots$$

la scrittura decimale di $f(n)$.

Per ogni n sia

$$e_n = \begin{cases} 5, & \text{se } d_{n,n} = 6; \\ 6, & \text{se } d_{n,n} \neq 6. \end{cases}$$

Sia

$$x = 0, e_0\, e_1\, e_2\, e_3\, \dots e_n \dots$$

Per ogni n si ha $x \neq f(n)$ perché la cifra decimale in posizione n di x è diversa dalla cifra decimale in posizione n di $f(n)$.

Quindi f non è una suriezione.

Il Teorema di Cantor-Bernstein-Schröder

Se esiste un'iniezione $f: A \to B$ scriviamo $|A| \leq |B|$.

Teorema

Se $|A| \leq |B|$ *e* $|B| \leq |A|$ *allora* $|A| = |B|$*.*

La cardinalità di $\wp(\mathbb{N})$

$\wp(\mathbb{N})$ è l'insieme di tutti sottoinsiemi di $\mathbb{N}$.
Contiene $\{0, 7, 13\}$, l'insieme dei numeri pari, l'insieme dei numeri primi, l'insieme dei numeri non primi, l'insieme dei numeri diversi da 111, l'insieme dei quadrati perfetti, ecc ecc

Teorema

$|\wp(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$.

Per il teorema di Cantor-Bernstein-Schröder basta dimostrare che $|\wp(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{R}|$ e che $|\mathbb{R}| \leq |\wp(\mathbb{N})|$.

$|\wp(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{R}|$

Dobbiamo definire un'iniezione $f : \wp(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$.

Dato $A \subseteq \mathbb{N}$ sia $d_n^A = \begin{cases} 0, & \text{se } n \notin A; \\ 1, & \text{se } n \in A. \end{cases}$

Sia $f(A) = 0, d_0^A\, d_1^A\, d_2^A\, d_3^A\, \dots$

Se $A \neq B$ allora esiste n che sta in A ma non in B (oppure il contrario).
Allora $d_n^A = 1$ e $d_n^B = 0$.
$f(A) \neq f(B)$ perché la cifra decimale in posizione n è diversa.

Quindi f è un'iniezione.

$|\mathbb{R}| \leq |\wp(\mathbb{N})|$

Dobbiamo definire un'iniezione $g : \mathbb{R} \to \wp(\mathbb{N})$.

Fissiamo una biiezione $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$.

Dato $x \in \mathbb{R}$ sia $g(x) = \{\, n \in \mathbb{N} \,:\, h(n) < x \,\}$.

Se $x, y \in \mathbb{R}$ sono diversi possiamo supporre che $x < y$.
Allora esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $x < q < y$.
Sia n tale che $q = h(n)$.
Allora $n \notin g(x)$ e $n \in g(y)$.
Perciò $g(x) \neq g(y)$.

Quindi g è un'iniezione.

Non esiste l'infinito più grande

Teorema (Cantor)

Per ogni insieme A, si ha $|A| < |\wp(A)|$.

Dimostrazione.

$|A| \leq |\wp(A)|$ perché la funzione $f : A \to \wp(A)$ definita da $f(a) = \{a\}$ è un'iniezione.

Per dimostrare che $|\wp(A)| \neq |A|$ fissiamo $g : A \to \wp(A)$ e mostriamo che non può essere una biiezione perché non è suriettiva.
Sia $X = \{\, a \in A : a \notin g(a)\,\}$. Se g fosse suriettiva esisterebbe $\bar{a} \in A$ tale che $g(\bar{a}) = X$. Ma allora

$$\bar{a} \in X \iff \bar{a} \in g(\bar{a}) \iff \bar{a} \notin X. \qquad \square$$

Corollario

Per ogni insieme A, esiste B tale che $|A| < |B|$.

Una successione infinita (e più) di infiniti

Indichiamo con $\aleph_0$ la cardinalità dell'insieme $\mathbb{N}$, e quindi di tutti gli insiemi numerabili come $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ecc.
$\aleph_0$ è il più piccolo cardinale infinito.

Indichiamo con $\aleph_1$ il cardinale immediatamente più grande di $\aleph_0$.

Proseguiamo così definendo $\aleph_2, \aleph_3, \dots, \aleph_n, \dots$

Per ogni n sia A_n un insieme di cardinalità $\aleph_n$. Consideriamo $A = \bigcup_n A_n$.
Dato che $|A_{n+1}| \leq |A|$ la cardinalità di A è maggiore di $\aleph_n$, per ogni n.

Indichiamo con $\aleph_\omega$ la cardinalità di A.

Indichiamo con $\aleph_{\omega+1}$ il cardinale immediatamente più grande di $\aleph_\omega$.

Proseguiamo così definendo $\aleph_{\omega+2}, \aleph_{\omega+3}, \dots, \aleph_{\omega+n}, \dots,$
$\aleph_{\omega+\omega}, \aleph_{\omega+\omega+1}, \aleph_{\omega+\omega+2}, \dots, \aleph_{\omega+\omega+\omega}, \dots$

In questo modo si produce una successione di cardinali infiniti sempre più grandi, fino ad arrivare a $\aleph_{\aleph_1}$ e persino a un cardinale κ tale che $\kappa = \aleph_\kappa$.

La somma cardinale

Siano κ e λ due cardinali. Pensiamo che κ e λ siano insiemi di quelle cardinalità.

Consideriamo due insiemi A e B di cardinalità κ e λ tali che $A \cap B = \varnothing$ (ad esempio $A = \kappa \times \{0\}$ e $B = \lambda \times \{1\}$).
$\kappa + \lambda$ è la cardinalità di $A \cup B$.

Se κ e λ sono finiti (cioè numeri naturali) questa è l'usuale addizione.

Possiamo riscrivere alcune delle nostre scoperte:
l'unione di due insiemi numerabili è numerabile diventa $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

L'addizione cardinale soddisfa alcune proprietà familiari:

- $\kappa + 0 = \kappa$;
- $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$;
- $(\kappa + \lambda) + \mu = \kappa + (\lambda + \mu)$.

Non è però vero che $\kappa + \lambda = \kappa + \mu$ implica $\lambda = \mu$.
Infatti $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 = \aleph_0 + 0$.

Se almeno uno tra κ e λ è infinito si ha $\kappa + \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.
Per esempio $\aleph_0 + \aleph_7 = \aleph_7$ e $\aleph_{\omega+1} + \aleph_{100} = \aleph_{\omega+1}$.

Il prodotto cardinale

Siano κ e λ due cardinali. $\kappa \cdot \lambda$ è la cardinalità di $\kappa \times \lambda$.

Se κ e λ sono finiti (cioè numeri naturali) questa è l'usuale moltiplicazione.

Possiamo riscrivere alcune delle nostre scoperte:
$|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ diventa $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

Il prodotto cardinale soddisfa alcune proprietà familiari:

- $\kappa \cdot 0 = 0$ e $\kappa \cdot 1 = \kappa$;
- $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$;
- $(\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu = \kappa \cdot (\lambda \cdot \mu)$.

Non è però vero che $\kappa \cdot \lambda = \kappa \cdot \mu$ e $\kappa \neq 0$ implicano $\lambda = \mu$.
Infatti $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0 = \aleph_0 \cdot 1$.

Se almeno uno tra κ e λ è infinito si ha $\kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.
Per esempio $\aleph_{16} \cdot \aleph_{17} = \aleph_{17}$ e $\aleph_{\omega+\omega} \cdot \aleph_{\omega+1000} = \aleph_{\omega+\omega}$.

L'ipotesi del continuo

Un'altra operazione sui cardinali

Se κ è un cardinale definiamo 2^κ come la cardinalità dell'insieme $\wp(\kappa)$.

Se κ è finito (cioè un numero naturale) questa è l'usuale operazione di elevamento a potenza: infatti se $|A| = n$ allora $|\wp(A)| = 2^n$.

Il teorema di Cantor ci dice che $\kappa < 2^\kappa$ per qualunque κ.

Dato che $|\mathbb{R}| = |\wp(\mathbb{N})|$ si ha $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$, ed è particolarmente importante calcolare $2^{\aleph_0}$.

L'ipotesi del continuo

Dal teorema di Cantor sappiamo che $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$, cioè che $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$.

Nel 1878 Cantor ipotizzò che valesse $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, cioè che $2^{\aleph_0}$ fosse il più piccolo possibile.

Questa ipotesi è chiamata ipotesi del continuo e modernamente viene indicata dalla sigla inglese CH.

CH può venire riformulata come l'asserzione che se $A \subseteq \mathbb{R}$ è infinito allora A è numerabile oppure $|A| = |\mathbb{R}|$.

Da questa formulazione viene l'espressione "ipotesi del continuo", perché la retta dei numeri reali è chiamata anche "il continuo".

Cantor era convinto della verità dell'ipotesi del continuo, e tentò invano per molti anni di dimostrarla.

David Hilbert e l'ipotesi del continuo

Nel 1900, all'inizio del nuovo secolo, David Hilbert era il più grande matematico vivente.

Al Congresso Matematico Internazionale di Parigi, Hilbert presentò una famosa lista di 23 problemi all'epoca irrisolti. Molti di questi problemi hanno avuto un notevole impatto nella matematica del XX secolo. Questa lista ha ispirato i Millennium Prize Problems: sette problemi aperti in matematica enunciati dal Clay Mathematics Institute nel 2000, ciascuno con un premio di un milione di dollari.

Il primo problema della lista di Hilbert era l'ipotesi del continuo.

Come dimostrare o rifiutare l'ipotesi del continuo?

Nella prima metà del XX secolo si affermò un sistema di assiomi per la teoria degli insiemi conosciuto come ZFC (teoria di Zermelo-Fraenkel con l'Assioma della Scelta).

A tutt'oggi ZFC viene considerata la teoria su cui si fonda gran parte della matematica.

Quindi la soluzione ideale per CH sarebbe una delle seguenti:

1. una dimostrazione in ZFC di CH (per esempio dimostrando che ogni insieme più che numerabile $A \subseteq \mathbb{R}$ soddisfa $|A| = |\mathbb{R}|$);
2. una dimostrazione in ZFC della negazione di CH (per esempio costruendo un insieme più che numerabile $A \subseteq \mathbb{R}$ tale che $|A| < |\mathbb{R}|$).

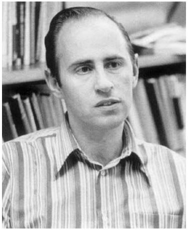
Entrambe le soluzioni sono impossibili

Nel 1940 Kurt Gödel (1906-1978) dimostrò che ZFC non può dimostrare la negazione di CH.

Nel 1963 Paul Cohen (1934-2007) dimostrò che ZFC non può dimostrare CH.

Diciamo che CH è indipendente da ZFC.

CH è un problema indecidibile (in ZFC).



Ma allora CH?

Al giorno d'oggi l'indecibilità di CH da ZFC viene vista dai ricercatori che lavorano in quest'area in diversi modi:

- alcuni pensano che la teoria ZFC sia troppo debole, e cercano nuovi assiomi da aggiungere a ZFC; questi assiomi dovrebbero essere supportati da qualche giustificazione intuitiva e dovrebbero decidere CH; tipicamente ci si attende che CH risulti essere falsa;
- altri ritengono che CH sia un problema mal posto: non sappiamo deciderlo perché il concetto di "sottoinsieme arbitrario di $\mathbb{R}$" è troppo vago;
- altri sostengono che dobbiamo convivere con il fatto che CH sia indipendente: esistono universi insiemistici in cui CH è vera ed altri in cui CH è falsa; possiamo studiare e confrontare questi universi, provare a costruirne di nuovi e scoprire le conseguenze di CH e quelle della sua negazione. È la visione del "multiverso" insiemistico.