

Appunti di Matematica

Docente: A. Pisani

Calcolo dei limiti

1) Definizione di limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

Si dice che la funzione $y = f(x)$ tende al limite l se la variabile x tende a x_0 e si scrive : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ intendendo che, se $f(x)$ (o y) approssima il valore l , allora la x approssima il valore x_0 . Più esattamente avremo che $f(x) \in I(l, \varepsilon)$ per tutte le x , tali che $x \in I(x_0, \delta)$, escluso x_0 e all'interno del dominio di $f(x)$. In simboli:
 $\forall I(l; \varepsilon) \exists I(x_0; \delta) : x \in I(x_0; \delta) - \{x_0\} \cap D_f \Rightarrow f(x) \in I(l; \varepsilon)$ oppure, equivalentemente:
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

2) Operazioni con i limiti

Supponiamo di avere due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, in modo tale che valgano i seguenti limiti: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = h$, allora valgono le seguenti proprietà utili per il calcolo dei limiti:

a) SOMMA: $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = l + h$

b) DIFFERENZA: $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = l - h$

c) PRODOTTO: $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = l \cdot h$

d) RAPPORTO: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{h}$, ma solo se il denominatore non è nullo: $h \neq 0$.

Se invece $h = 0$, ma $l \neq 0$, allora il limite del rapporto tra $f(x)$ e $g(x)$ è infinito:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

Infine, se sia $h = 0$ che $l = 0$ allora il limite non è calcolabile semplicemente sostituendo a x il valore di x_0 : è una *forma indeterminata*.

Inoltre, sia $k \in \mathbb{R}$ un numero reale, allora:

e) POTENZA: $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^k = l^k$

f) RADICE: $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{l}$

NOTA: le stesse operazioni valgono se consideriamo i limiti per $x \rightarrow \infty$, anziché per $x \rightarrow x_0$.

ESEMPI:

I) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1}{6x-5} = 3$ infatti, dato che il limite è per $x \rightarrow x_0$, se sostituisco il valore di $x_0 = 1$ al numeratore ottengo: $2 \cdot 1 + 1 = 3$, mentre al denominatore: $6 \cdot 1 - 5 = 1$, utilizzando la regola del rapporto tra i limiti, concludo che il limite vale il rapporto tra 3 e 1, quindi il suo valore è 3.

II) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{5-x}{x}} = 2$ infatti, dato che il limite è per $x \rightarrow x_0$, se sostituisco il valore di $x_0 = 1$, al numeratore sotto radice ottengo 4, al denominatore sotto radice ottengo 1 e quindi il limite vale $\sqrt{\frac{4}{1}} = \sqrt{4} = 2$.

III) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + x + 1}{x - 4} = \infty$ infatti, dato che il limite è per $x \rightarrow x_0$, se sostituisco il valore di $x_0 = 4$ al numeratore ottengo un valore pari a 21, mentre al denominatore ottengo zero. In base quanto visto circa il limite del rapporto tra funzioni il valore del limite è, in questo caso, infinito.

3) Calcolo di limiti per $x \rightarrow \infty$ di funzioni razionali.

Valgono i seguenti limiti: $\lim_{x \rightarrow \infty} (ax + b) = \infty$, per qualunque $a \neq 0$. In generale per una funzione razionale abbiamo: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots}{cx^m + dx^{m-1} + \dots}$ ove il numeratore è un polinomio di grado n ed il denominatore è un polinomio di grado m. Allora valgono i seguenti risultati:

A) se il grado del numeratore n è maggiore del grado del denominatore m: $n > m$ allora il limite è infinito. Il segno dell'infinito dipende dalla differenza tra n-m e dai segni del coefficiente a e del coefficiente c delle x di grado più alto.

$$n > m \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots}{cx^m + dx^{m-1} + \dots} = \infty$$

B) Se il grado del numeratore n e del denominatore m sono uguali: $n = m$ allora il limite è dato dal rapporto tra i coefficienti delle x di grado più alto: a/c.

$$n = m \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots}{cx^m + dx^{m-1} + \dots} = \frac{a}{c}$$

C) se il grado del numeratore è minore del grado del denominatore: $n < m$ allora il limite è zero: $n < m \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots}{cx^m + dx^{m-1} + \dots} = 0$

ESEMPI:

I) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{6x + 5} = \infty$ dato che il limite è per $x \rightarrow \infty$ e il grado del numeratore è 2, mentre il denominatore ha grado 1. Quindi siamo nel limite tipo A): $n=2$ e $m=1$ per cui $n>m$ ed il limite è infinito.

II) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 + 2x^2 + x - 1}{3x^3 + x - 6} = \frac{6}{3} = 2$ dato che $x \rightarrow \infty$ e, inoltre, il numeratore ed il denominatore hanno entrambi lo stesso grado: $n=m=3$ quindi il limite vale il rapporto tra il coefficiente della x di grado 3 al numeratore che è 6, fratto il coefficiente della x di grado 3 al denominatore che è 3.

III) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 4x + 2}{x^3 + 1} = 0$ dato che il limite è per $x \rightarrow \infty$, inoltre il grado del numeratore è $n=2$, mentre il denominatore ha grado $m=3$ e quindi $n<m$ per cui questo limite è del tipo C) e vale zero.

4) Forme indeterminate del tipo 0/0.

Consideriamo il caso ad esempio: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$. In questo caso il limite è del tipo per $x \rightarrow x_0$, con $x_0 = 1$, ma se sostituisco il valore di 1 a x ottengo zero sia al numeratore che al denominatore e quindi non posso applicare nessuno dei criteri precedenti. Ho una forma indeterminata. Posso risolvere la forma indeterminata e calcolare il valore del limite scomponendo in fattori il numeratore ed in denominatore. Nell'esempio considerato il numeratore si scompone in $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ e quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-2) = 1 - 2 = -1.$$

5) Forme indeterminate del tipo $\infty - \infty$.

Consideriamo il seguente esempio: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x+1} - \sqrt{x})$ in questo caso il limite è la differenza tra due funzioni che all'infinito divergono entrambe, quindi non è lecito applicare il criterio della differenza tra limiti, che è valido solo per funzioni convergenti. La tecnica che si usa in questo caso è la razionalizzazione. La funzione di cui devo calcolare il limite è la differenza tra radici e quindi può essere razionalizzata moltiplicando il numeratore e denominatore (che in questo caso è 1) per la somma delle due radici stesse:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x+1} - \sqrt{x}) \frac{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1-x}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x}} = \infty$$

L'ultimo passaggio è motivato dal fatto che il numeratore è ora un polinomio di primo grado, mentre il denominatore è un'espressione in radice quadrata di x e quindi

di grado $\frac{1}{2}$. Per questo motivo il grado del numeratore è maggiore di quello del denominatore e quindi il limite è infinito.