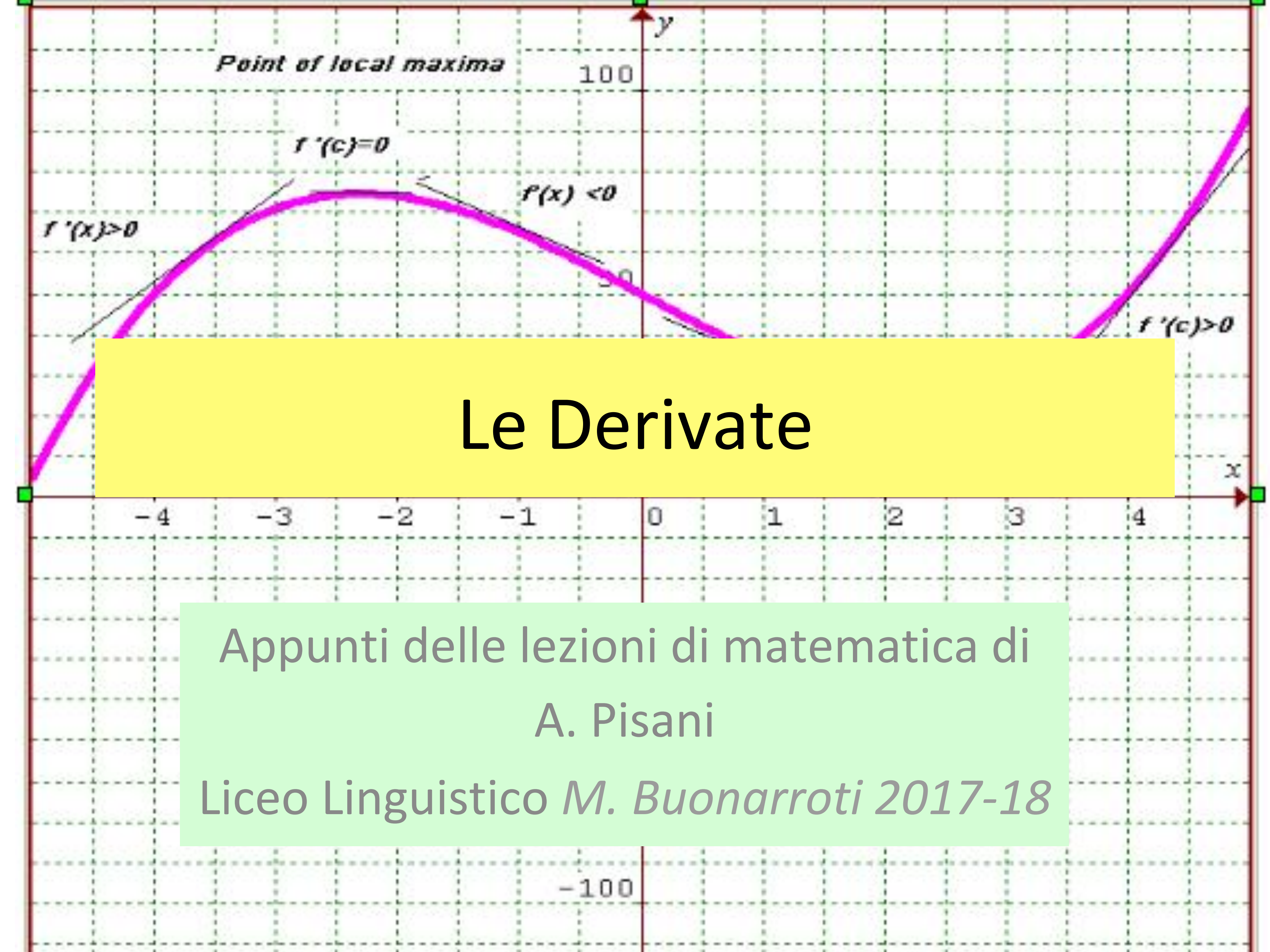


Le Derivate

Appunti delle lezioni di matematica di

A. Pisani

Liceo Linguistico *M. Buonarroti 2017-18*

Nota bene

Questi appunti sono da intendere come guida allo studio e come riassunto di quanto illustrato durante le lezioni in classe. In nessun caso sono sostitutivi del libro di testo che rimane uno strumento indispensabile allo studio.

A. Pisani

Indice

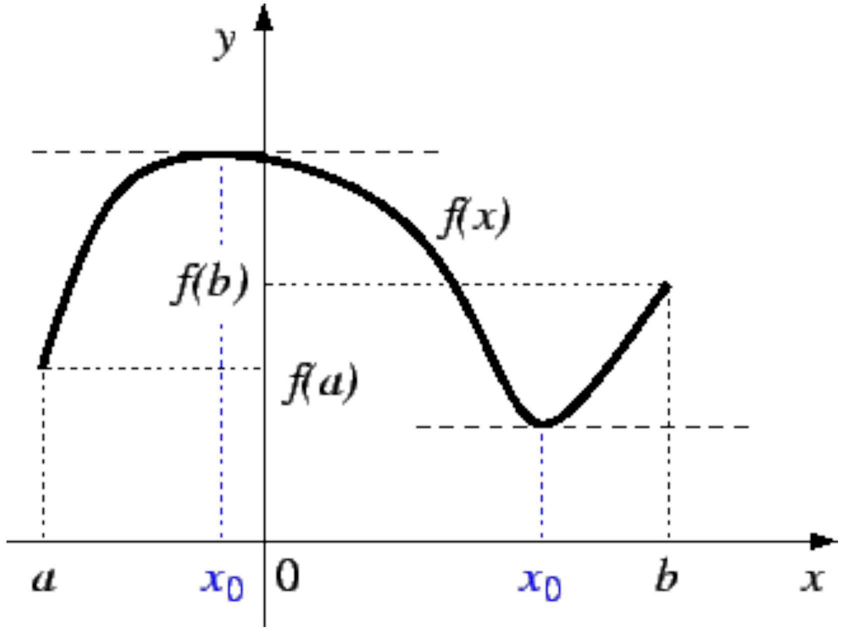
Nota storica

Il concetto fondamentale del calcolo differenziale è quello di **derivata.** Come già in altri casi, l'origine di questo concetto è un problema geometrico: il problema di trovare la retta **tangente** in un punto ad una curva. Questo problema venne affrontato in modo formalmente appropriato solo verso la fine del **XVII secolo** dal matematico francese **Pierre de Fermat** che stava tentando di determinare i massimi e i minimi di certe funzioni.

L' idea di Fermat è comprensibile se si osservano le figure seguenti.

Nota storica

Consideriamo la curva qui riportata: si può pensare che ad ogni punto sulla curva sia associata la direzione della retta tangente alla curva in quello stesso punto.



Fermat notò che, nei punti ove la funzione assume i suoi valori massimi o minimi, la tangente ha una direzione orizzontale.

Nota storica

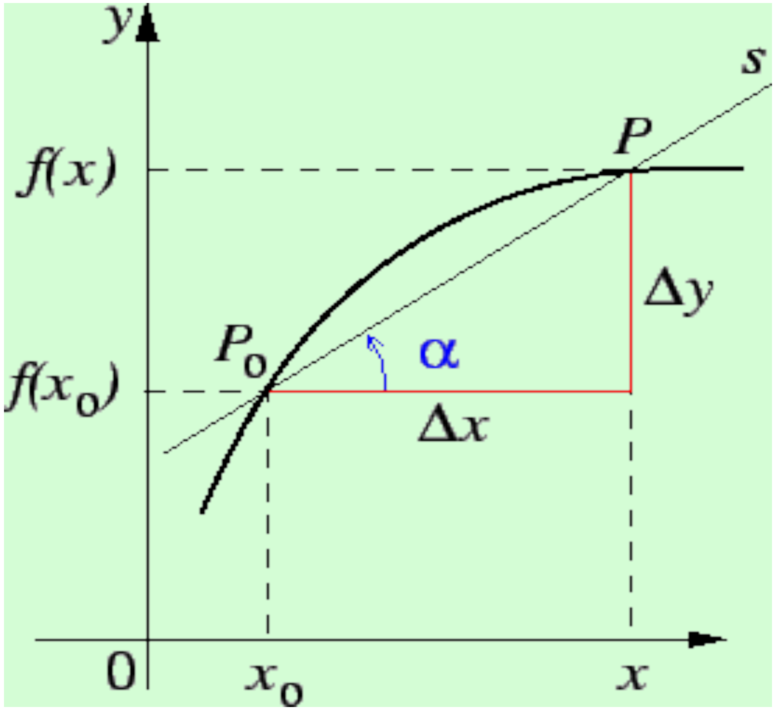
Si pose quindi il problema di come calcolare la retta tangente ad una curva in un punto qualsiasi. Nel tentativo di risolvere questo problema Fermat giunse alle nozioni fondamentali su cui si fonda il concetto di derivata.

Successivamente **I. Barrow**, maestro di I. Newton, mise in luce la relazione che esiste tra il calcolo dell'area sotto una curva ed il problema della tangente. Forono **I. Newton** e **Leibnitz** a comprenderne il profondo significato e a dar vita ad un nuovo campo della matematica: **il calcolo differenziale ed integrale.** Fin dal suo nascere, la derivata trovò immediate applicazioni in fisica nel **calcolo delle velocità** e, più in generale, delle rapidità di variazione.

Il problema della tangente

Supponiamo di voler individuare **la retta tangente** t al grafico di una funzione $y = f(x)$ in un punto di coordinate $P(x_0; y_0)$

Una qualsiasi retta s passante per $P(x_0; y_0)$ è una **secante**.



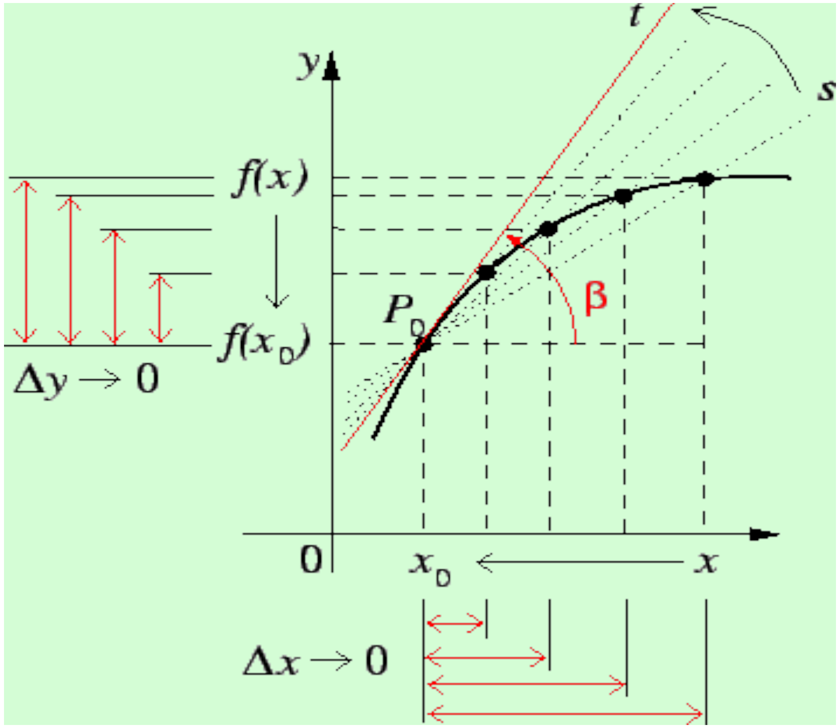
La secante passa per $P(x_0; y_0)$ e $P(x; y)$

Il coefficiente angolare della secante vale:

$$m_s = \tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Il problema della tangente

Se ora immaginiamo di far avvicinare il punto $P(x;y)$ al punto $P(x_0;y_0)$ avremo che la retta secante s approssima sempre più la retta tangente t, contraddistinta dal fatto che i due punti coincidono.



Utilizzando la nozione di limite:

$$\lim_{P \to P_0} (SECANTE) = TANGENTE$$

Quindi il coeff. Angolare della tangente nel punto $P_0 = P(x_0;y_0)$ si ottiene col limite:

$$m_t(P_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

La definizione di derivata

Consideriamo la funzione $y = f(x)$ e sia x_0 un punto ove la **funzione è continua** e quindi appartenente al suo dominio.
Nell' ipotesi che esista finito il seguente limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Il valore del limite qui indicato prende il nome di **derivata prima** della funzione in x_0 e viene indicato da:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

La derivazione

Se una funzione $y = f(x)$ ammette derivata prima in x_0 allora la funzione si dice **derivabile** nel punto x_0

Il valore della derivata cambia in generale a seconda della funzione di partenza e del punto nel quale si vuole calcolare la derivata. Quindi **la derivata è essa stessa una nuova funzione della variabile x:** $y = f'(x)$ Ove il segno di 0 a pedice della x viene omesso.

L'operazione che consente di passare da una data funzione alla sua derivata, si chiama **OPERATORE di DERIVAZIONE,** e si indica con il simbolo D maiuscolo:

$$D : f \rightarrow f' \qquad f'(x) = D\left[f(x)\right]$$

Interpretazione geometrica della derivata prima

Da quanto illustrato nell'esempio introduttivo, possiamo dedurre che la derivata della funzione $y = f(x)$ nel punto $P(x_0; y_0)$ si può interpretare come il **coefficiente angolare della retta tangente** al grafico della funzione nel punto scelto.

In simboli:

$$m_t(P_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$m_t(P_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Interpretazione fisica della derivata prima

In moltissimi campi della scienza si ha la necessità di calcolare la rapidità con cui cambia una grandezza rispetto ad un' altra.
Ad esempio in fisica la **velocità** esprime la rapidità con cui cambia la posizione x di un oggetto rispetto al tempo t

La **velocità media** di un corpo è data quindi da rapporto tra la variazione della sua posizione, pari allo spazio percorso, Δx e il tempo Δt impiegato a percorrere tale spazio:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

Il valore di $\bar{v}$ così calcolato esprime la media (temporale) della velocità nel periodo di tempo che scorre tra gli istanti t e t_0

Interpretazione fisica della derivata prima

E' spesso utile conoscere non solo la velocità media, ma anche e soprattutto la **velocità istantanea**. Come per la tangente, anche qui calcoliamo la velocità istantanea $\boxed{v(t_0)}$ nell'istante t_0 come il limite a cui tende la velocità media $\bar{v}$, precedentemente calcolata, quando il tempo t tende al valore t_0

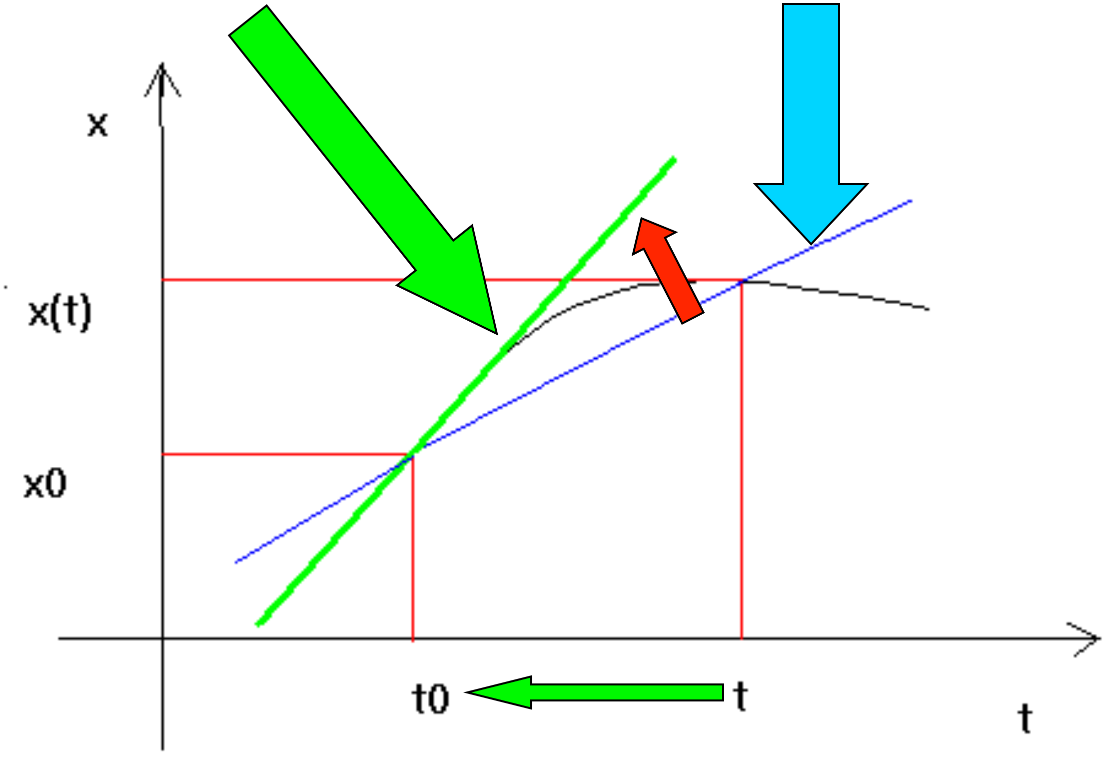
$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = x'(t_0)$$

In conclusione, la derivata prima della posizione in funzione del tempo è interpretabile, fisicamente, come **la velocità istantanea**.

Interpretazione fisica della derivata prima

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = x'(t_0)$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$



Le derivate in fisica: l'accelerazione

Le derivate sono applicate in tutta la fisica. Ecco alcuni esempi.
In modo analogo a quanto visto per la relazione tra posizione e tempo, è possibile dire che quando la velocità di un corpo varia nel tempo, allora il corpo è soggetto ad una accelerazione.
In formule, **l'accelerazione media** è la variazione di velocità nello intervallo di tempo:

$$\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$$

Quindi applicando le stesse considerazioni viste per la posizione, **l'accelerazione istantanea** è:

$$a(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = v'(t_0)$$

Le derivate in fisica: la forza

Un altro esempio di uso delle derivate in fisica è dato dal secondo principio della dinamica.

Secondo la formulazione data da I. Newton, se nel tempo Δt un corpo in moto ha cambiato la sua quantità di moto di ΔP , allora si può dire che la forza media che ha agito sul copro nel periodo di tempo è data da:

$$\overline{F} = \frac{\Delta P}{\Delta t}$$

Il valore istantaneo della forza è quindi dato dal limite per $\Delta t \rightarrow 0$

$$F = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = P'(t)$$

Quindi **la forza è la derivata della quantità di moto rispetto al tempo**

Derivate elementari

Calcoliamo le derivate di alcune funzioni elementari, applicando la definizione.

Consideriamo la funzione costante: $f(x) = k$, avremo allora che:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{k - k}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{0}{x - x_0} = 0$$

In sintesi:

$$D[k] = 0$$

La derivata della funzione costante è zero, qualunque sia il valore della costante k!

Derivate elementari

Consideriamo la funzione identità: $f(x) = x$ Avremo quindi:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

In sintesi: $$D\left[x\right] = 1$$

<u>**La derivata della funzione identità è uno**</u>, qualunque sia il valore della x!

Derivate elementari

Consideriamo la funzione potenza ad esponente 2: $f(x) = x^2$
e consideriamo che sia $x = x_0 + h$ con $h \neq 0$ allora avremo:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x^2{}_0}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x^2{}_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x_0 + h)^2 - x^2{}_0}{(x_0 + h) - x_0}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^2{}_0 + 2hx_0 + h^2 - x^2{}_0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2hx_0 + h^2}{h}$$

Derivate elementari

Quindi:

$$\lim_{h \to 0} \frac{2hx_0 + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \left(2x_0 + h\right) = 2x_0$$

In conclusione, avremo che nel generico punto x:

$$D\left[x^2\right] = 2x$$

Derivate elementari

Si può generalizzare il risultato precedente e mostrare che, se consideriamo la funzione potenza ad esponente qualsiasi:

$$f(x) = x^{\alpha}$$

La sua derivata prima è:

$$D\left[x^{\alpha}\right] = \alpha x^{\alpha - 1}$$

Tabella di derivate elementari

$f(x)$	$D\left[f(x)\right]$
$f(x)=k$	$D\left[k\right]=0$
$f(x)=x$	$D\left[x\right]=1$
$f(x)=x^{\alpha}$	$D\left[x^{\alpha}\right]=\alpha x^{\alpha-1}$
$f(x)=\ln(x)$	$D\left[\ln(x)\right]=\dfrac{1}{x}$

Tabella di derivate elementari

$f(x)$	$D[f(x)]$
$f(x) = e^x$	$D[e^x] = e^x$
$f(x) = sin(x)$	$D[sin(x)] = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$D[\cos(x)] = -sin(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$D[\tan(x)] = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

Regole di derivazione: somma

Poiché la derivata è un limite speciale, le regole per il calcolo delle derivate seguono (in parte) i teoremi sui limiti.

In quel che segue, supponiamo che le funzioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$ siano entrambe continue e derivabili. In queste ipotesi avremo che valgono le seguenti regole di derivazione:

1) la derivata della somma è la somma delle derivate:

$$D[f(x)+g(x)] = D[f(x)] + D[g(x)]$$

Ad esempio:

$$D[x^3 + x^2] = D[x^3] + D[x^2] = 3x^2 + 2x$$

Regole di derivazione: differenza

2) la derivata della differenza è la differenza delle derivate:

$$D\left[f(x)-g(x)\right]=D\left[f(x)\right]-D\left[g(x)\right]$$

Ad esempio:

$$D\left[x^4-x^3\right]=D\left[x^4\right]-D\left[x^3\right]=4x^3-3x^2$$

Regole di derivazione: prodotto per una costante

3) la derivata del prodotto di una funzione per una costante è uguale alla costante per la derivata della funzione:

$$D\left[k \cdot f(x)\right] = k \cdot D\left[f(x)\right]$$

Cioè, la costante che moltiplica la funzione può essere *portata fuori dal segno di derivata*. Ad esempio:

$$D\left[2 \cdot x^3\right] = 2 \cdot D\left[x^3\right] = 2\left(3x^2\right) = 6x^2$$

Regole di derivazione: prodotto

N.B.: La regola di derivazione del prodotto di due funzioni non è la stessa del prodotto dei limiti. Infatti:

4) **la derivata del prodotto di due funzioni è data dal prodotto della derivata della prima funzione per la seconda più la prima funzione per la derivata della seconda:**

$$D\left[f(x)\cdot g(x)\right] = D\left[f(x)\right]\cdot g(x) + f(x)\cdot D\left[g(x)\right]$$

Regole di derivazione: esempio

Esempio:

$$D\left[x \cdot \operatorname{sen}(x)\right] = D\left[x\right] \cdot \operatorname{sen}(x) + x \cdot D\left[\operatorname{sen}(x)\right]$$

Inoltre:

$$D\left[x\right] \cdot \operatorname{sen}(x) + x \cdot D\left[\operatorname{sen}(x)\right] = 1 \cdot \operatorname{sen}(x) + x \cdot \cos(x)$$

Infine:

$$D\left[x \cdot \operatorname{sen}(x)\right] = \operatorname{sen}(x) + x \cdot \cos(x)$$

Regole di derivazione: rapporto

N.B.: La regola di derivazione del rapporto di due funzioni non è la stessa del prodotto dei limiti. Infatti:

5) **la derivata del rapporto di due funzioni è data dal prodotto della derivata della funzione al numeratore per il denominatore meno il numeratore per la derivata del denominatore, il tutto diviso per il quadrato del denominatore:**

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\left(D\left[f(x)\right]\right)\cdot g(x) - f(x)\cdot D\left[g(x)\right]}{\left[g(x)\right]^2}$$

Regole di derivazione: esempio 1

Esempio: calcoliamo la derivata della seguente funzione:

$$y = \frac{x+1}{2x-3}$$

Utilizziamo la regola appena vista, ove il numeratore è:

$f(x) = x+1$ Ed il denominatore è: $g(x) = 2x-3$

Le loro derivate sono: $D\left[f(x)\right] = f'(x) = D[x+1] = 1$

$$D\left[g(x)\right] = g'(x) = D[2x-3] = 2$$

Quindi:

$$D[y] = D\left[\frac{x+1}{2x-3}\right] = \frac{D\left[x+1\right](2x-3)-(x+1)D\left[2x-3\right]}{(2x-3)^2}$$

Regole di derivazione: esempio 1

$$\frac{D[x+1](2x-3)-(x+1)D[2x-3]}{(2x-3)^2}=$$

$$\frac{1(2x-3)-(x+1)2}{(2x-3)^2}=\frac{2x-3-2x-2}{(2x-3)^2}=\frac{-5}{(2x-3)^2}$$

In conclusione:

$$D\left[\frac{x+1}{2x-3}\right]=\frac{-5}{(2x-3)^2}$$

Regole di derivazione: potenza

Deriviamo la potenza di una funzione: $y = [f(x)]^{\alpha}$

Applicando la definizione e le precedenti regole, otteniamo:

$$D\{[f(x)]^{\alpha}\} = \alpha\left[f(x)\right]^{\alpha-1} \cdot D\left[f(x)\right]$$

Regole di derivazione: esempio 2

Esempio: deriviamo la seguente funzione: $y = (2x-1)^2$

In questo caso, possiamo applicare la regola di derivazione della potenza di una funzione (vedi diapositiva precedente) con:

$\alpha = 2$ e $f(x) = 2x-1$ Quindi:

$$D[(2x-1)^2] = 2(2x-1)^{2-1} \cdot D[2x-1] =$$

$$2(2x-1)2 = 4(2x-1) = 8x-4$$

Regole di derivazione: esempio 2

Esempio: deriviamo la seguente funzione: $y = \sqrt{2x-1}$

In questo caso, possiamo applicare la regola di derivazione della potenza di una funzione (vedi diapositiva precedente) con: $\alpha = \frac{1}{2}$ e $f(x) = 2x - 1$ Infatti:

$$y = \sqrt{2x-1} = (2x-1)^{1/2}$$

$$D[(2x-1)^{1/2}] = \frac{1}{2}(2x-1)^{1/2-1} \cdot D[2x-1] =$$

$$\frac{1}{2}(2x-1)^{-1/2}\,2 = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

Tabelle con le regole di derivazione

Alcune tabelle con derivate elementari e regole di derivazione possono essere letta ai seguenti indirizzi web:

http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/2/formulas.1/index.html

http://www.matematicamente.it/analisi/der_elementari.html

http://www.matematicamente.it/analisi/reg_der.html

http://www.math.it/formulario/derivate.htm

Applicazioni della derivata: la retta tangente

Consideriamo il seguente problema: data la funzione, $y = f(x)$ che, per ipotesi, è continua e derivabile in tutto il suo dominio, cerchiamo l'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel punto $P(x_0; y_0)$ con: $y_0 = f(x_0)$

L'equazione cercata è del tipo: $y = m \cdot x + q$, ove abbiamo che:

$m = f'(x_0)$ Ovvero il coefficienta angolare della tangente è dato dalla derivata prima della funzione in x_0

Per determinare, infine, il valore di q si utilizza il fatto che la tangente passa per il punto $P(x_0; y_0)$, quindi l'equazione è:

$$y = f'(x_0) \cdot x + q \qquad \text{Ove :} \quad q = y_0 - f'(x_0) \cdot x_0$$

Esercizio 1

Consideriamo la funzione: $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ e cerchiamo l'equazione della tangente al grafico di questa funzione nel punto di ascissa: $x_0 = 2$ Abbiamo quindi che:

Inoltre:

$$y_0 = f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 1 = 8 - 8 + 1 = 1$$

$$f'(x) = D[x^3 - 2x^2 + 1] = 3x^2 - 2 \cdot 2x + 0 = 3x^2 - 4x$$

Quindi: $$m = f'(x_0 = 2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 12 - 8 = 4$$

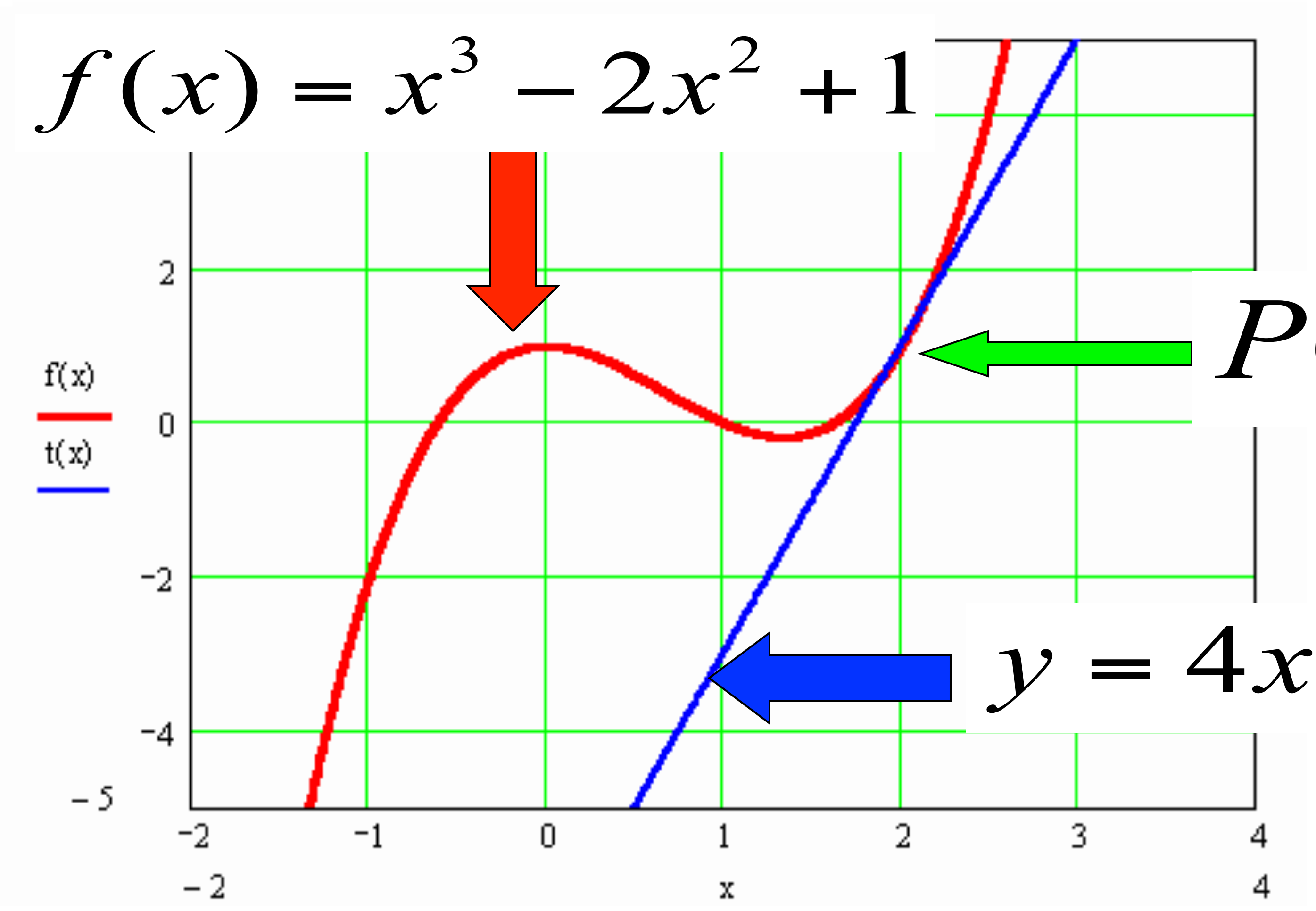
e: $$q = y_0 - f'(x_0) \cdot x_0 = 1 - (4) \cdot 2 = -7$$

L'equazione della tangente alla funzione data, nel punto $P(2;1)$ è quindi:

$$y = 4x - 7$$

Segue grafico

Esercizio 1



Esercizio 2

Data la funzione: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$
determinate per quali valori di x la tangente alla funzione è una retta orizzontale.

Soluzione

La funzione è continua e derivabile in tutto il suo dominio, quindi per rispondere alla domanda dell'esercizio è sufficiente calcolare la derivata prima, che è il coefficiente angolare della tangente, e vedere per quali valori di x la derivata è nulla.

Esercizio 2

La derivata prima della funzione è:

$$f'(x) = D[x^3 - 3x^2 + 1] = D[x^3] - 3D[x^2] + D[1] =$$

$$3x^2 - 3 \cdot 2x = 3x^2 - 6x$$

Quindi la condizione che la tangente sia orizzontale, e quindi abbia coefficiente angolare nullo, si traduce nell'equazione:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0$$

Le soluzioni di $3x^2 - 6x = 0$ Sono: $x_1 = 0$ $x_2 = 2$

Esercizio 2

I corrispondenti valori dell' ordinata sul grafico della funzione sono:

$$y_1 = f(x_1 = 0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 1 = 1$$

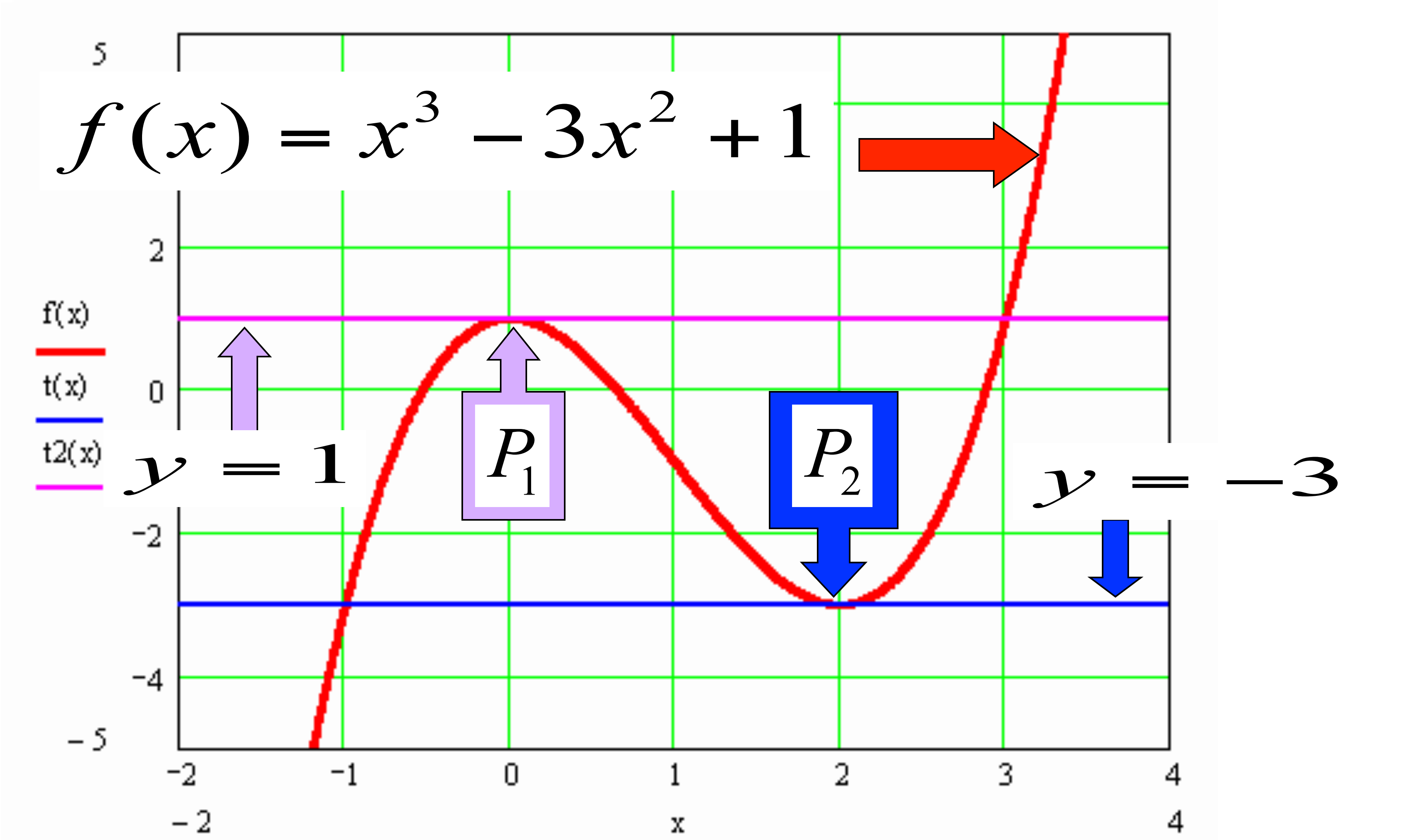
$$y_2 = f(x_2 = 2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 1 = 8 - 12 + 1 = -3$$

Quindi la funzione ha tangente orizzontale nei due punti di coord.:

$$P_1(0;1) \qquad P_2(2;-3)$$

Segue grafico

Esercizio 2



Esercizi proposti

1) Considerate la funzione: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$ e determinate la equazione della tangente per $x_0 = 1$

Soluzione: $y = -x + \frac{1}{3}$

2) Data la funzione $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 - 1$

determinate le coordinate dei punti nei quali la tangente al grafico della funzione data è una retta orizzontale.

Soluzione: $P_1(0;-1)$ $P_2\left(1;-\frac{3}{4}\right)$ $P_3(2;-1)$