Propagazione delle incertezze

Date le due misure dirette: $x = x_0 \pm \delta x$ e $y = y_0 \pm \delta y$, consideriamo le incertezze delle seguenti grandezze derivate:

1) Somma: $s = x + y$, avremo che: $s = s_0 \pm \delta s$ con $s_0 = x_0 + y_0$ e $\delta s = \delta x + \delta y$
2) Differenza: $d = x - y$, avremo che: $d = d_0 \pm \delta d$ con $d_0 = x_0 - y_0$ e $\delta d = \delta x + \delta y$
3) Multiplo: $m = n \cdot x$, avremo che: $m = m_0 \pm \delta m$ con $m_0 = n \cdot x_0$ e $\delta m = n \cdot \delta x$
4) Prodotto: $p = x \cdot y$, avremo che: $p = p_0 \pm \delta p$ con $p_0 = x_0 \cdot y_0$ e $\delta p = p_0 \cdot \left(\frac{\delta x}{x_0} + \frac{\delta y}{y_0} \right)$
5) Rapporto $r = \frac{x}{y}$, avremo che: $r = r_0 \pm \delta r$ con $r_0 = \frac{x_0}{y_0}$ e $\delta r = r_0 \cdot \left(\frac{\delta x}{x_0} + \frac{\delta y}{y_0} \right)$
6) Potenza: $w = x^n$, avremo che: $w = w_0 \pm \delta w$ con $w_0 = x_0^n$ e $\delta w = w_0 \cdot n \cdot \left(\frac{\delta x}{x_0} \right)$

Esempi

1) Somma: Due aste hanno le seguenti lunghezze: $x = (5.2 \pm 0.1)cm$ e $y = (2.1 \pm 0.1)cm$. Quanto vale la lunghezza complessiva delle due aste? Risposta: la lunghezza complessiva è data dalla somma delle due aste: $s = x + y$ e quindi il valore di lettura è $s_0 = x_0 + y_0 = 5.2cm + 2.1cm = 7.3cm$, l'incertezza sulla somma è $\delta s = \delta x + \delta y$ e quindi $\delta s = 0.1cm + 0.1cm = 0.2cm$. In conclusione la lunghezza complessiva vale $s = (7.3 \pm 0.2)cm$

2) Differenza: La misura di due chiodi ha dato i seguenti risultati: $x = (9.1 \pm 0.2)cm$ e $y = (6.1 \pm 0.3)cm$. Quanto misura la differenza tra le lunghezze misurate? Risposta: la differenza si ottiene $d = x - y$ e inoltre $d = d_0 \pm \delta d$. Il valore di lettura della differenza è dato da: $d_0 = x_0 - y_0 = 9.1cm - 6.1cm = 3.0cm$. L'incertezza della differenza è $\delta d = \delta x + \delta y = 0.2cm + 0.3cm = 0.5cm$. In conclusione la differenza tra le lunghezze dei due chiodi misura: $d = (3.0 \pm 0.5)cm$.

3) Multiplo: Una lamina metallica ha forma quadrata e il lato misura $L = (5.2 \pm 0.1)cm$. Quanto misura il perimetro della lamina? Risposta: il perimetro è dato da: $P = 4 \cdot L$, quindi possiamo utilizzare la regola di propagazione dell'incertezza per il multiplo (la numero 3) con L al posto di x, 4 al posto di n e P al posto di m. per cui: $P = 4 \cdot L = 4(5.2 \pm 0.1)cm = (20.8 \pm 0.4)cm$.

4) Prodotto: La superficie di un tavolo rettangolare ha i lati aventi le seguenti misure: $a = (1.80 \pm 0.01)m$ e $a = (0.85 \pm 0.01)m$. Quanto misura la superficie del tavolo? Risposta: la superficie si calcola come: $S = a \cdot b$ e avremo inoltre: $S = S_0 \pm \delta S$. Quindi:

$S_0 = a_0 \cdot b_0 = 1.80 \cdot 0.85 m^2 = 1.53 m^2$ e

$\delta S = S_0 \cdot \left(\frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b} \right) = 1.53 m^2 \cdot \left(\frac{0.01}{1.80} + \frac{0.01}{0.85} \right) = 0.0265 m^2 \cong 0.03 m^2$.

In conclusione: $S = (1.53 \pm 0.03) m^2$

5) Rapporto: Un veicolo ha percorso la distanza pari a $D = (400 \pm 1) m$ in un tempo pari a $T = (40 \pm 1) s$. Quanto misura la sua velocità? Risposta: la velocità del veicolo si calcola come: $v = D / T$ e quindi $v = v_0 \pm \delta v$. Avremo che: $v_0 = D_0 / T_0 = 400 m / (40 s) = 10 m / s$ e inoltre $\delta v = v_0 \cdot \left(\frac{\delta D}{D} + \frac{\delta T}{T} \right) = 10 \frac{m}{s} \cdot \left(\frac{1}{400} + \frac{1}{40} \right) = 0.275 m / s \cong 0.3 m / s$. In conclusione la velocità del veicolo misura: $v = (10.0 \pm 0.3) m / s$

7) Potenza: Una lamina metallica ha forma quadrata e il lato misura $L = (5.2 \pm 0.1) cm$. Quanto misura la superficie della lamina? Risposta: la superficie si calcola come: $S = L^2$, inoltre $S = S_0 + \delta S$ e quindi: $S_0 = L_0^2 = (5.2 cm)^2 = 27.04 cm^2$ e $\delta S = S_0 \cdot 2 \cdot \left(\frac{\delta L}{L} \right) = 27.04 cm^2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{0.1}{5.2} \right) = 1.04 cm^2 \cong 1 cm^2$. In conclusione la superficie misura: $S = (27 \pm 1) cm^2$.

Esercizi proposti

1) Per calcolare il volume di un solido irregolare lo si immerge in una provetta graduata a forma cilindrica. La superficie di base della provetta misura $S = (15.0 \pm 0.2) cm^2$ e in seguito all'immersione del solido, il liquido contenuto nella provetta si alza di un tratto $h = (0.6 \pm 0.1) cm$. Calcolate quanto misura il volume del solido. [R.: $V = (9 \pm 2) cm^3$]
2) Un triangolo ha base ed altezza che misurano $b = (3.02 \pm 0.01) m$ e $h = (2.17 \pm 0.01) m$. Calcolate la misura della superficie del triangolo. [R.: $S = (3.28 \pm 0.03) m^2$]