

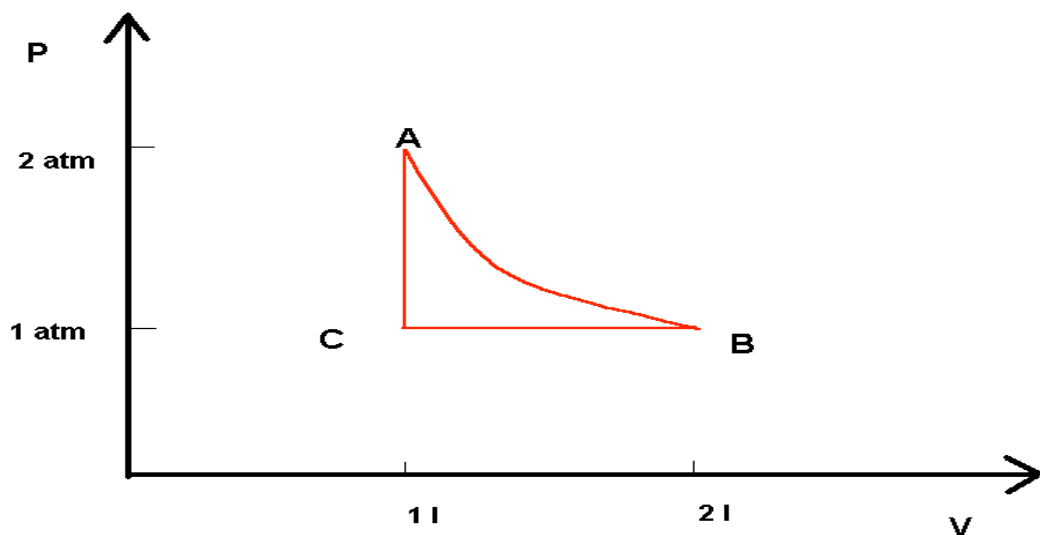
Anno scolastico 2006-07

Appunti del corso di FISICA

di
A. Pisani

Studio di un ciclo termodinamico

Un gas ideale monoatomico compie un ciclo composto dalle seguenti tre trasformazioni. Il gas si trova inizialmente nello stato A a pressione $P_0 = 2\text{atm}$ e volume $V_0 = 1\text{litro}$, quindi compie una trasformazione isoterma fino a raggiungere lo stato B caratterizzato da un volume pari a $2V_0$ e una pressione del valore di $(1/2)P_0$. La seconda trasformazione è un'isobara che porta il gas da B allo stato C avente volume pari a V_0 . Infine il gas ritorna allo stato A seguendo una isocora. Studiate il ciclo descritto allo scopo di determinarne il rendimento η . Calcolate la variazione di entropia nel passaggio dallo stato A allo stato B sapendo che la quantità di gas è pari a $n = 0.5\text{moli}$. [N.B.: $R=8.3143\text{ J}/(\text{mol K})$]



Soluzione

Come primo punto calcoliamo il calore scambiato Q , il lavoro svolto L e la variazione di energia interna ΔU per ciascuna delle tre trasformazioni che compongono il ciclo.

Trasformazione isoterma da A a B

In questo caso il prodotto $P \cdot V$ rimane costante durante la trasformazione (Legge di Boyle dei gas ideali), quindi:

$$P \cdot V = P_A \cdot V_A = 2 \text{ atm} \cdot 1l = 2 \times 1.01 \times 10^5 \text{ Pa} \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 202J$$

dato che $1 \text{ atm} = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ e $1l = 10^{-3} \text{ m}^3$. Quindi è possibile calcolare il lavoro svolto durante la trasformazione usando la relazione valida per le isoterme:

$$L_{A \rightarrow B} = nRT \cdot \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = P_A V_A \cdot \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

Nel nostro caso avremo: $L_{A \rightarrow B} = 202J \cdot \ln(2) \cong 140.02J$.

Per quel che riguarda la variazione di energia interna, avremo che, dato che il gas che compie la trasformazione è un gas ideale monoatomico: $\Delta U = \frac{3}{2} nR\Delta T$. Tuttavia, dato che la trasformazione è isoterma, avremo $\Delta T = 0$ e quindi: $\Delta U = 0$.

Il valore del calore scambiato con l'ambiente durante questa trasformazione si può ottenere da primo principio della termodinamica: $Q = \Delta U + L$, quindi nel caso della trasformazione isoterma da A a B: $Q_{A \rightarrow B} = L_{A \rightarrow B} = 140.02J$.

Trasformazione isobara da B a C

In questo caso la pressione è costante e quindi possiamo calcolare il lavoro come:

$$L_{B \rightarrow C} = P \cdot \Delta V = P_C \cdot (V_C - V_B)$$

da questa relazione otteniamo: $L_{B \rightarrow C} = 1 \text{ atm} \cdot (1l - 2l) = -101J$.

La variazione di energia interna è data da: $\Delta U = \frac{3}{2} nR\Delta T$ e quindi:

$$\Delta U = \frac{3}{2} nR\Delta T = \frac{3}{2} nR \cdot (T_C - T_B) = \frac{3}{2} (nRT_C - nRT_B) = \frac{3}{2} (P_C V_C - P_B V_B) = \frac{3}{2} P_C (V_C - V_B) = \frac{3}{2} P_C \cdot \Delta V$$

dato che la pressione è costante e quindi $P_C = P_B$. Dalla precedente relazione si deduce quindi che:

$$\Delta U_{B \rightarrow C} = \frac{3}{2} L_{B \rightarrow C}$$

per cui $\Delta U_{B \rightarrow C} = \frac{3}{2} (-101J) = -151.5J$.

Come per la trasformazione precedente, il calore scambiato con l'ambiente si calcola utilizzando il primo principio della termodinamica e quindi:

$$Q_{B \rightarrow C} = \Delta U_{B \rightarrow C} + L_{B \rightarrow C} = \frac{3}{2} P \cdot \Delta V + P \cdot \Delta V = \frac{5}{2} P \cdot \Delta V$$

Da cui $Q_{B \rightarrow C} = -252.5J$.

Trasformazione isocora da C ad A

In questo caso il volume è costante e quindi: $\Delta V = 0$. Per questa ragione quindi: $L_{C \rightarrow A} = 0$, cioè il gas non si espande e quindi non compie lavoro sull'ambiente esterno.

La Variazione di energia interna $\Delta U_{C \rightarrow A}$ può essere ottenuta nel modo seguente:

$$\Delta U = \frac{3}{2} nR\Delta T = \frac{3}{2} nR \cdot (T_A - T_C) = \frac{3}{2} (nRT_A - nRT_C) = \frac{3}{2} (P_A V_A - P_C V_C) = \frac{3}{2} V_C (P_A - P_C) = \frac{3}{2} V \cdot \Delta P$$

questo a causa del fatto che la trasformazione è isocora e quindi: $V_C = V_A$. Quindi:

$$\Delta U_{C \rightarrow A} = \frac{3}{2} 1l \cdot (2atm - 1atm) = \frac{3}{2} \cdot 1l \cdot 1atm = \frac{3}{2} 101J = 151.5J.$$

Ancora utilizzando il primo principio della termodinamica:
 $Q_{C \rightarrow A} = \Delta U_{C \rightarrow A} + L_{C \rightarrow A} = \Delta U_{C \rightarrow A} = 151.5J$.

Questo conclude la parte relativa allo studio delle singole trasformazioni. Riassumiamo i risultati ottenuti nel quadro che segue:

	Q	L	ΔU
A→B	140.02J	140.02J	0
B→C	-252.5J	-101J	-151.5J
C→A	151.5J	0	151.5J
A→B→C→A	39.02J	39.02J	0

Dalla tabelle riassuntiva del ciclo verifichiamo che: $\Delta U_{tot} = 0$, come deve essere a causa del fatto che, essendo l'energia interna U una funzione di stato, la sua variazione nel corso di una trasformazione ciclica deve essere necessariamente nulle. Per questa stessa ragione il calore totale scambiato con l'ambiente e il lavoro totale svolto dal sistema sull'ambiente devono essere uguali: $Q_{tot} = L_{tot}$. Il fatto che sono verificate queste due relazioni implica che i calcoli ed i principi applicati sono corretti.

NOTA BENE: Abbiamo ricavato tutti i valori relativi al ciclo riportati nella tabella senza aver bisogno di sapere di quante moli è composto il gas che compie il ciclo!

Calcolo del rendimento del ciclo

Per calcolare il rendimento del ciclo utilizziamo il fatto che il calore totale scambiato con l'ambiente si può scrivere come: $Q_{tot} = Q_{in} - Q_{out}$ cioè come la differenza tra il calore fornito al sistema (=gas) meno il calore sottratto al sistema. Nel nostro caso quindi Q_{in} è dato dalla somma di tutti i termini positivi nella colonna del calore della tabella del ciclo. In altre parole: $Q_{in} = 140.02J + 151.5J = 291.52J$.

Il rendimento del ciclo è definito come la frazione di calore fornito al sistema che, durante il ciclo, viene trasformato in lavoro netto (totale), quindi:

$$\eta = \frac{L_{tot}}{Q_{in}}$$

Sostituendo i valori calcolati, avremo che:

$$\eta = \frac{L_{tot}}{Q_{in}} = \frac{39.02J}{291.52J} \cong 0.13$$

Il ciclo ha quindi un rendimento di circa il 13%.

Questo conclude lo studio del ciclo proposto.

Calcolo della variazione di entropia

Per calcolare la variazione di entropia da A a B, abbiamo bisogno di conoscere la temperatura alla quale si trova il gas. Infatti, per una trasformazione ideale isoterma, la variazione di entropia ΔS è definita da:

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}$$

dove ΔQ è il calore scambiato da sistema durante la trasformazione. Se il gas è composto da $n = 0.5moli$ allora:

$$T = T_A = \frac{P_A V_A}{nR} = \frac{2atm \cdot 1l}{0.5moli \cdot 8.315J / Kmoli} = \frac{202J}{4.1575J / k} = 48.59K$$

e quindi:

$$\Delta S_{A \rightarrow B} = \frac{Q_{A \rightarrow B}}{T_A} = \frac{140.02J}{48.59K} = 2.88J / K$$

Questo completa la soluzione del problema proposto.